A generalized Cartan decomposition for connected compact Lie groups and its application (Topics in Combinatorial Representation Theory)

田中, 雄一郎

数理解析研究所講究録
第 1795 巻 2012 年 117-134

A generalized Cartan decomposition for connected compact Lie groups and its application

東京大学大学院数理科学研究科　田中 雄一郎
Graguate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　導入〜主結果

本稿では、複素多様体への可視的な作用の理論を動機付けとして得られる、コンパクトリー群に対するカルタン分解のある一般化について述べます。可視的な作用の理論はその目的を無重複表現の統一的扱いとして、小林俊行氏によって導入されました。ここで述べる結果に関連する表現は全て有限次元ですが、可視的な作用の理論は無限次元表現にも通用する理論であるため、次のように無重複表現を定義します。

定義 1.1. G を局所コンパクト群、$\mathcal{H}$ を G のユニタリ表現とする。このとき、

$$\mathcal{H} \text{ は無重複表現 } \Leftrightarrow \mathrm{End}_G(\mathcal{H}) \text{ は可換}$$

このように定義すると、ユニタリ表現 $\mathcal{H}$ が無限次元で連続スペクトラムを含む場合にも通用します。また $\mathcal{H}$ がユニタリでなくても完全可約な有限次元表現である場合には、「$\mathcal{H}$ の既約分解に各既約表現が高々一度ずつしか現れない」という通常の定義と同値になります。以下に、「有限次元」、「無限次元で離散スペクトラム」、「無限次元で連続スペクトラム」であるような無重複表現の例をそれぞれ一つずつ挙げます。

無重複表現の例

- (対称テンソル積表現) $U(n) \curvearrowright S^k(\mathbb{C}^n)$
- ($GL_k - GL_n$ 双対性) $U(k) \times U(n) \curvearrowright \mathrm{Poly}[M(k,n;\mathbb{C})]$
- (リーマン対称空間上の L^2 空間) $GL(n,\mathbb{R}) \curvearrowright L^2(GL(n,\mathbb{R})/O(n))$

表現が無重複であるというのは強い要請ですが、現在までに数多くの無重複表現の例が知られており、上で挙げたのはその内のほんの一例です。この無

重複表現は種々の観点から研究が行われていますが、表現の現れる場面の多様さに相俟ってその無重複性の証明法もまた個性的です。この状況にあって、無重複表現の統一的扱いをその目的とし、小林氏は複素多様体への可視的な作用の理論を導入しました。実際この理論を用いることで、例えば前述の 3 つの例のように散在して（既に無重複であることが）知られていた表現の無重複性に対する新しい証明を系統的に与えることができるのみならず、新たな無重複表現の発見もなされています。以下に、（強）可視的な作用の定義を述べます：

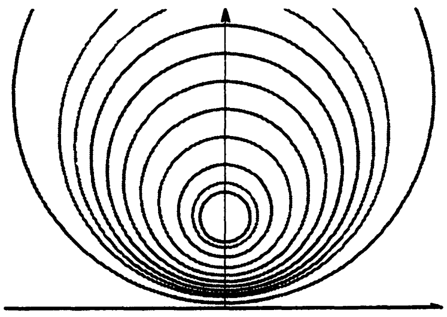
定義 1.2. リー群 G が連結複素多様体 D に正則に作用しているとする。ある D の部分多様体 S であって次の条件を満たすものが存在するとき、G の作用は**強可視的**であるという。
・$D' := G \cdot S$ は D の開集合である。
・D' の反正則微分同相写像 σ が存在して、σ は $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし、各 G-軌道を保つ。

また、上で S を単に D の部分集合とした場合は、G の作用は **S-可視的**であるという。

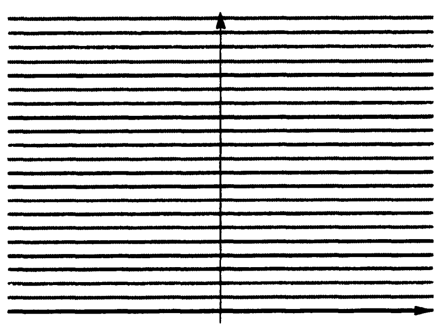
この定義 1.2 において、1 つ目の条件は「S がある程度大きくなければならない」と要請していますが、逆に 2 つ目の条件は「S がある程度小さくなければならない」と要請していることに注意して下さい。S のことを（強）可視的作用のスライスと呼ぶことにします。

次に示すのは強可視的な作用の典型的な例です。以下の 2 つの例では複素多様体 D として上半平面 $\mathbb{H}$ を考えます。いずれの場合でも、スライス S として虚軸の正の部分 $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ を、反正則微分同相写像 σ として $\sigma(z) = -\bar{z},\ z \in \mathbb{H}$ を取ることができます。

群 $G = SO(2)$ の上半平面への一次分数変換による作用



群 $G = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ の上半平面への一次分数変換による作用



可視的な作用の理論の枠組みで具体的な表現の無重複性を示す際には、次に挙げる小林氏の定理（[Ko4]）が用いられます。

定理 1.3. G をリー群、D を連結な複素多様体、$\mathcal{V} \to D$ を G 同変な D 上の正則エルミートベクトル束とする。このとき以下に挙げる条件が満たされるならば、正則大域切断の空間 $\mathcal{O}(D,\mathcal{V})$ に埋め込まれる G の任意のユニタリ表現は無重複である。

1（底空間）底空間への作用 $G \curvearrowright D$ は S-可視的である

2（ファイバー）ファイバーにおける固定化部分群の表現は無重複である
+ いくつかの compatibility に関する条件（詳しくは論文 [Ko4]）

この定理はユニタリ表現が無限次元である場合や、既約分解に連続スペクトラムが現れる場合にも適用でき、「無重複」は定義 1.1 において定められた意味と解釈します。定理 1.3 から、リー群の複素多様体への可視的な作用があれば無重複表現の存在が期待できます：

$$\boxed{\text{可視的}} \overset{\text{小林 [Ko4]}}{\rightsquigarrow} \boxed{\text{無重複}}$$

これに対し、それではこの逆は成り立つのか？というのがここでの主な問題意識です。即ち、

$\boxed{\text{問題}}$ 無重複表現があれば、複素多様体への可視的な作用が存在するか？

今のところ、一般的な設定における「無重複表現に対して可視的な作用が伴うための十分条件」は知られていません。

$$\boxed{\text{無重複}} \overset{??}{\rightsquigarrow} \boxed{\text{可視的}} \qquad (\diamond)$$

ですが、「この考えは正しいであろう」という立場に立つと、無重複定理を糸口にリー群自身の新しい構造定理（一般化カルタン分解）を得られることが期待できます。そこで、小林氏は以下のプログラムを提唱しました。まずいくつかの用語を導入します。

定義 1.4. G をリー群、H, L をその部分リー群であって G/L が複素多様体となり、H の G/L への左作用が正則になるようなものとする。このとき、以下の 3 つの条件が満たされるような G の自己同型 σ が存在するならば、3 つ組 (G,H,L) を *visible triple* と呼ぶ。

- σ は H 及び L を保つ。
- $\sigma : G/L \to G/L$ は反正則微分同相写像である。
- 分解 $G = HG^\sigma L$ が成り立つ。

さらに、G^σ の部分集合 B に対し $G = HBL$ が成り立つ時、これを G の一般化カルタン分解という。

補足 1.5 (カルタン分解について).
例えば $G = GL(n, \mathbb{C})$ に対して 3 つ組 $(G, H, L) = (G \times G, \mathrm{diag}(G), \mathrm{diag}(G))$ 即ち共役作用 $G \curvearrowright (G \times G)/\mathrm{diag}(G)$ を考えると、これは行列の標準形を考えることに相当します。

Program 1.6.

1. visible triple (G, H, L) を分類せよ。
2. visible triple (G, H, L) に対し、良いスライス B を見つけて一般化カルタン分解 $G = HBL$ を与えよ。

このプログラムは、既にいくつかの場合に解決されています。

(1) G が A 型コンパクトリー群、H, L が G のレビ部分群である場合 $\cdots$ [Ko5]

(2) (G, L), (G, H) が簡約型対称対である場合 $\cdots$
カルタン分解の理論は [Fl], [Ho], [Ma1] による。visible action の存在は「(G, L) がエルミート対称対である」という仮定の下で [Ko6] による。

ここでは (1) の結果に注目し、次のように設定したいと思います。

$\boxed{\text{設定}}$

G: 連結コンパクトリー群、

$\mathfrak{t}$: カルタン部分環、

σ: $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 対合、

H, L: $\mathfrak{t}$ に関するレビ部分群

以降、この節では上記 $\boxed{\text{設定}}$ の下で考えます。まず、一般化カルタン分解と無重複表現とがどのように結びつくかについて説明します。H, L がともに G のレビ部分群であることより G/L, G/H, $(G \times G)/(L \times H)$ が複素多様体となり、$G^\sigma \cdot o$, $G^\sigma \cdot o$, $(G^\sigma \times G^\sigma) \cdot o$ がそれぞれの全実部分多様体となります。故に、もし分解 $G = HBL$（従って $G = HG^\sigma L$）が成り立てば、3 つの強可視的作用

$$H \curvearrowright G/L, \quad L \curvearrowright G/H, \quad \mathrm{diag}(G) \curvearrowright (G \times G)/(L \times H)$$

が同時に得られ、従って 3 つの無重複定理

$$\mathrm{Ind}_L^G \chi|_H, \quad \mathrm{Ind}_H^G \chi|_L, \quad \mathrm{Ind}_L^G \chi \otimes \mathrm{Ind}_H^G \chi'$$

が証明されます ("無重複性の三位一体定理（triunity theorem for multiplicity-freeness property）" [Ko2])。ただし、χ, χ' はユニタリ指標です。特に最後のテンソル積表現に注目して改めて書くと、

$$G = \mathrm{L}_\lambda B \mathrm{L}_\mu \Rightarrow m\lambda \otimes n\mu: \text{ M.F. for } \forall m, n \in \mathbb{N}$$

が成り立ち、これは$\boxed{\text{可視的}}\rightsquigarrow\boxed{\text{無重複}}$という方向です。(ただし$\lambda$と$\mu$は$G$の既約表現の最高ウェイトとし、$\mathrm{L}_\lambda$, L_μはそれぞれ対応するレビ部分群とします。また、「M.F.」は「無重複(multiplicity-free)」の意とします。)一方、この逆

$$m\lambda \otimes n\mu: \ \text{M.F. for } \forall m, n \in \mathbb{N} \overset{??}{\Rightarrow} G = \mathrm{L}_\lambda B \mathrm{L}_\mu \qquad (\diamond')$$

即ち

$$\boxed{\text{無重複}} \overset{??}{\rightsquigarrow} \boxed{\text{カルタン分解}} \rightsquigarrow \boxed{\text{可視的}} \qquad (\diamond')$$

という方向が成り立つか?ということを考えたいと思います。まずユニタリ群$U(n)$に対しては、J. R. Stembridge氏の組み合わせ的手法による$GL(n,\mathbb{C})$の有限次元無重複テンソル積表現の分類結果([St1])と前述の小林氏による$U(n)$の一般化カルタン分解の分類結果とを比較参照することで、$(\diamond')$が成り立つことが分かります。

注意 1.7. 上記の三位一体定理の所では(正則)線束の場合しか言及しませんでしたが、小林氏は論文[Ko2]においてA型旗多様体上で(正則)ベクトル束の場合も扱い、「全ての有限次元無重複テンソル積表現に対して可視的な作用が伴う」という、$(\diamond')$よりも強いことを$U(n)$に対して示しています。

さらに、Stembridge氏は全ての複素単純リー環に対して有限次元無重複テンソル積表現の分類を組み合わせ的手法によって与えました([St2])。すると、$U(n)$のときと同様に他の単純コンパクトリー群に対しても上記の対応$(\diamond')$が成立することが期待されます。これが実際に成立する、というのが本稿の主結果です。

主結果 1.8. $\boxed{\text{設定}}$の下において、前述のProgram1.6は完了した。さらに、任意の連結コンパクトリー群に対し、対応$(\diamond')$が成立する。

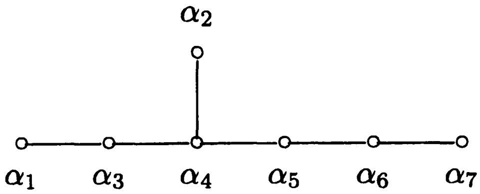
次節では、証明の概略について述べます。

2 証明の概略

2.1 分解可能であることの証明について

この節ではまず分解に用いる編み上げの手法について述べます。編み上げの手法([Ko5])は小林氏によって導入されたものです。本稿ではこの手法のE_7型コンパクトリー群に対する使用例(命題2.1)を一つ挙げ、説明に代えたいと思います。

命題 2.1. GをE_7型の連結単連結コンパクトリー群とし、Dynkin図形のラベルを次のように与える。



Type E_7

このとき H, L をそれぞれ $\{\alpha_7\}, \{\alpha_1\}$ に対応する極大レビ部分群とすると、(G, H, L) は visible triple である。

Proof. まず、τ, τ' をそれぞれ以下の Vogan 図形（Figure 1,2）に対応する G の対合とします。

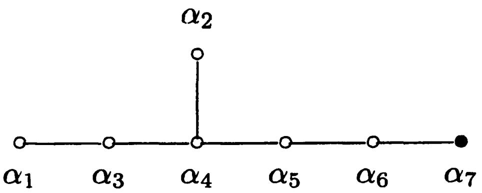


Figure 1

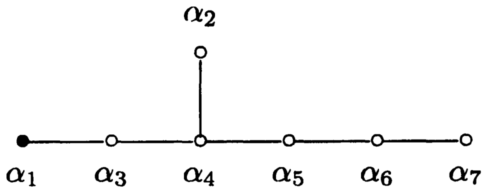


Figure 2

このとき、$\tau\tau'$ は $\mathfrak{g}^{\tau\tau'} = \sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{e}(6)$ を満たします。$\mathfrak{g}^{\tau\tau'}$ を次のように書き換えます。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{\tau\tau'} &= \mathfrak{g}^{\tau,\tau'} \oplus \mathfrak{g}^{-\tau,-\tau'} \\
&= (\mathbb{R}H_1 \oplus (\sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10))) \oplus \mathfrak{g}^{-\tau,-\tau'} \\
&= (\mathbb{R}H_1 \oplus (\mathbb{R}H_2 \oplus \mathfrak{so}(10))) \oplus \mathfrak{g}^{-\tau,-\tau'}.
\end{aligned}$$

ただし上で $\mathbb{R}H_1$ を $\mathfrak{g}^{\tau\tau'}$ の中心、$\mathbb{R}H_2$ を $\sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10)$ の中心としました。ここで $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\tau,-\tau'}$ の極大可換部分空間であって、Weyl 対合 σ で固定されるものとします。$(\mathfrak{e}_6, \sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10))$ が非柱状型エルミート対称対であることに注意すると、ある $H_3 \in \mathfrak{so}(10)$ が存在して $\mathbb{R}(H_2 + H_3) \oplus \mathfrak{su}(4)$ が $\sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10)$ における $\mathfrak{a}$ の中心化環となります。よって、

$$Z_{\mathfrak{g}^{\tau,\tau'}}(\mathfrak{a}) = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}(H_2 + H_3) \oplus \mathfrak{su}(4)$$

を得ます。続いて $\mathfrak{g}^{\tau'} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(12)$ を考えます。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{\tau'} &= \mathfrak{g}^{\tau',\tau} \oplus \mathfrak{g}^{\tau',-\tau} \\
&= (\mathfrak{su}(2)^{\tau} \oplus \mathfrak{so}(12)^{\tau}) \oplus \mathfrak{g}^{\tau',-\tau} \\
&= (\mathbb{R}W_1 \oplus (\sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10))) \oplus \mathfrak{g}^{\tau',-\tau} \\
&= (\mathbb{R}W_1 \oplus (\mathbb{R}W_2 \oplus \mathfrak{so}(10))) \oplus \mathfrak{g}^{\tau',-\tau}.
\end{aligned}$$

ただし上では $\mathbb{R}W_1 := \mathfrak{su}(2)^{\tau}$ として、$\mathbb{R}W_2$ を $\mathfrak{so}(12)^{\tau}$ の中心、即ち $(\sqrt{-1}\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10))$ の中心としました。

G', G'' を G の解析的部分群であって、それぞれ部分リー環 $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(12)$ に対応するものとし、$G^{\tau'}$ を $G^{\tau'} = G'G''$ と書き換えます。このとき、すぐ下で紹介する対称対に対する分解定理（定理 2.2）を用いることで次を得ます。

$$G = G^{\tau} \exp(\mathfrak{a}) G' G''. \tag{1}$$

定理 2.2. (B.Hoogenboom, T.Matsuki) G を連結コンパクトリー群、τ, τ' を G の対合、H, L をそれぞれ τ, τ' に対応する対称部分群とする。また、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\tau, -\tau'}$ の極大可換部分空間とする。このとき、$\tau\tau'$ の $\mathfrak{g}$ の中心への作用が半単純ならば、G は次のように分解できる。

$$G = H \exp(\mathfrak{a}) L.$$

組 $(\mathfrak{g}', \mathbb{R}W_1)$ が対称対であることより、この定理 2.2 を再び次のように適用することができます。

$$G' = \exp(\mathbb{R}W_1) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1)$$

ただし、$\mathfrak{a}'$ は σ で固定される $\mathfrak{g}' = \mathfrak{su}(2)$ の 1 次元部分空間です。ここで、$\mathbb{R}W_1 \oplus \mathbb{R}W_2 = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$ であることより、ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $W_1 = aH_1 + bH_2$ を満たします。さらに、ルートに関する具体的な計算によって、$b \neq 0$ であることも分かります。次式は簡単ではありますが、重要です。

$$\begin{aligned}
&(\exp(\mathbb{R}W_1) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1))G'' \\
&\quad = (\exp(\mathbb{R}(aH_1 + b(H_2 + H_3))) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1))G''
\end{aligned}$$

この等式を用いることで、分解 (1) を次のようにして書き換えることができます。

$$\begin{aligned}
G &= G^{\tau} \exp(\mathfrak{a}) G' G'' \\
&= G^{\tau} \exp(\mathfrak{a}) (\exp(\mathbb{R}W_1) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1)) G'' \\
&= G^{\tau} \exp(\mathfrak{a}) \exp(\mathbb{R}(aH_1 + b(H_2 + H_3))) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1) G'' \\
&= G^{\tau} \exp(\mathbb{R}(aH_1 + b(H_2 + H_3))) \exp(\mathfrak{a}) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1) G'' \\
&= G^{\tau} \exp(\mathfrak{a}) \exp(\mathfrak{a}') \exp(\mathbb{R}W_1) G''.
\end{aligned}$$

$G^{\tau} = H$ であることと $\exp(\mathbb{R}W_1)G'' = L$ であることより、これで証明が終わりました。以下に示すのはこの分解における編み上げの操作を図式化したものです。

$$\begin{array}{ccccc}
M & & & & \\
 & \subset & & & \\
 & & G^{\tau'} & & \\
 & \supset & & \supset & \\
G & & & & L \\
\subset & & & & \\
H & & & &
\end{array}$$

$\square$

ほとんどの場合はこのようにして分解を得ることができますが、編み上げの手法を用いた分解が（筆者には）できなかった例があります。最後にこの例を紹介して、分解の手法の紹介を終わりにします。扱うのは $(G,H,L) = (SO(2n+1), U(n), U(n))$ の場合です。まず、$SO(2n+1) \supset SO(2n) \supset U(n)$ という関係に注意します。$(SO(2n+1), SO(2n))$ という組に注目してリー環 $\mathfrak{so}(2n+1)$ を $\mathfrak{so}(2n)$-module として分解します：

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \mathfrak{so}(2n) \oplus \mathfrak{q}$$

組 $(SO(2n), U(n))$ が対称対であることよりこれは次のように変形できます。

$$= \mathfrak{u}(n) \oplus \bigcup_{g \in U(n)} \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{q}$$

ただし、$\mathfrak{a}$ は対称対 $(SO(2n), U(n))$ に対応する極大可換部分空間であって、Weyl 対合（例えば複素共役写像）で固定されるものです。行列計算によって、これをさらに次のように変形できます。

$$= \mathfrak{u}(n) \oplus \bigcup_{g \in U(n)} \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{q}_0)$$

ただし $\mathfrak{q}_0$ は $\mathfrak{q}$ の（非可換）部分空間であり、Weyl 対合で固定され、さらに $\dim(\mathfrak{a}) + \dim(\mathfrak{q}_0) = n$ を満たすものです。指数写像を考えることで、最後の式から $G = H \exp(\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_0) L$ を得ます。

2.2 分解不可能であることの証明について

この節では分解不可能であることを証明する手法について説明します。

2.2.1 古典型に対する証明

まず、古典型に対しては quiver の不変式論を用いた小林氏による手法（[Ko5]）で証明することができます。ここでこの節における目標を確認します。

$\boxed{\text{目標}}$: G を連結コンパクトリー群、(H,L) を G のレビ部分群の組、σ を G の Weyl 対合とするとき

「積写像 $H \times G^\sigma \times L \to G$ が全射とならないこと」

を示す。

つまり、次の条件を満たす $g \in G$ を見つけることが目標です。

$$Hg \cap G^\sigma L = \varnothing$$

証明の（技術的な）ポイントは、G の極大トーラスが対角行列に取れるような $GL(N,\mathbb{C})$ への適当な埋め込みを考え、

- Weyl 対合を複素共役写像、
- レビ部分群を block diagonal な行列からなる行列群

に取れるようにすることです。すると、レビ部分群 L をある実行列 $R \in \mathrm{M}(N,\mathbb{R})$ の G 内の中心化群として実現することで $\mathrm{Ad}(G^\sigma L)R \subset \mathrm{M}(N,\mathbb{R})$ とできることから、分解不可能であることを示すためには

$$\mathrm{Ad}(Hg)J \cap \mathrm{M}(N,\mathbb{R}) = \varnothing \tag{2}$$

を満たす $g \in G$ の存在を示せばよいことになります。

レビ部分群 H の共役作用について考えます。まず、古典型コンパクトリー群 $G(n) = U(n), SO(2n+1), Sp(n)$ or $SO(2n)$ に対し、n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ と $G(n)$ のレビ部分群 $U(n_1) \times \cdots \times U(n_{k-1}) \times G(n_k)$ とが対応することを思い出します。X を $G(n)$ のリー環の元とし、H に対応する分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ に合わせて $X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ という具合に block 分けして表示します。ただしこれは $G(n)$ が A 型の場合であり、$G(n)$ が B 型の場合は分割 $2n+1 = n_1 + \cdots + n_{k-1} + (2n_k + 1) + n_{k-1} + \cdots + n_1$ を、C, D 型の場合は分割 $2n = n_1 + \cdots + n_{k-1} + 2n_k + n_{k-1} + \cdots + n_1$ を考え、リー環の元の block 分けもこれらの分割に合わせます。このとき、ループ $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_r = i_0$, $i_* \in \{1, 2, ..., k\}, i_* \neq i_{*+1}, r \geq 2$ に対して行列

$$A_{i_0 \cdots i_r}(X) := X_{i_0 i_1} X_{i_1 i_2} \cdots X_{i_{r-1} i_r} \tag{3}$$

を考えると（本当は、この下の注意 2.3 のように定義します）、H の共役作用について以下が成り立つことが分かります（ここで、レビ部分群が block diagonal に実現されていたことに注意してください)。

$$A_{i_0 \cdots i_r}(\mathrm{Ad}(h)X) = h_{i_0} A_{i_0 \cdots i_r}(X) h_{i_0}^{-1} \tag{4}$$

ただし、h_s で $h \in H = U(n_1) \times \cdots \times U(n_{k-1}) \times G(n_k)$ の上から s 番目の block を表すこととします。これより行列式が、H の共役作用に対する $A_{i_0 \cdots i_r}(X)$ の不変量（quiver の不変量）になることが分かります。指数写像を考えることで、(2) を満たす $g \in G(n)$ を探す問題は

「$A_{i_0 \cdots i_r}([X, R])$ が実数ではない複素数を係数に含む固有多項式を
与えるようなループ $i_0 \to \cdots \to i_r$ 及び $G(n)$ のリー環の元 X を探す」

問題に帰着されます。実際に各古典型コンパクトリー群に対して分解不可能性を示す際には、このようなループとリー環の元を具体的に与えることになります。

注意 2.3. (3) は実際には、各型に対して以下のように少し捻ったものを考えます：各古典型コンパクトリー環を次のように定義します。

A 型

$$\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : {}^t\overline{X} + X = O\}$$

B 型

$$\mathfrak{so}(2n+1) := \{X \in \mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C}) : {}^tXJ_{2n+1} + J_{2n+1}X = O,\ {}^t\overline{X} + X = O\}$$

C 型

$$\mathfrak{sp}(n) := \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) : {}^tXJ'_n + J'_nX = O,\ {}^t\overline{X} + X = O\}$$

D 型

$$\mathfrak{so}(2n) := \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) : {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = O,\ {}^t\overline{X} + X = O\}$$

X をリー環の元とするとき、

A 型

$$\tilde{X}_{ij} := \begin{cases} X_{ij} & (i < j), \\ {}^t\overline{X_{ji}} & (i > j) \end{cases}$$

B 型

$$\tilde{X}_{ij} := \begin{cases} X_{ij} & (i + j \leq 2k), \\ J_{n_i}{}^tX_{2k-j,2k-i}J_{n_j} & (i + j > 2k,\ i, j \neq k), \\ J_{2n_k+1}{}^tX_{2k-j,k}J_{n_j} & (i = k, j > k), \\ J_{n_i}{}^tX_{k,2k-i}J_{2n_k+1} & (i > k, j = k) \end{cases}$$

C 型

$$\tilde{X}_{ij} := \begin{cases} X_{ij} & (i + j \leq 2k), \\ J_{n_i}{}^tX_{2k-j,2k-i}J_{n_j} & (i + j > 2k,\ i, j \neq k), \\ J'_{n_k}{}^tX_{2k-j,k}J_{n_j} & (i = k, j > k), \\ J_{n_i}{}^tX_{k,2k-i}J'_{n_k} & (i > k, j = k) \end{cases}$$

D 型

$$\tilde{X}_{ij} := \begin{cases} X_{ij} & (i + j \leq 2k), \\ J_{n_i}{}^tX_{2k-j,2k-i}J_{n_j} & (i + j > 2k,\ i, j \neq k), \\ J_{2n_k}{}^tX_{2k-j,k}J_{n_j} & (i = k, j > k), \\ J_{n_i}{}^tX_{k,2k-i}J_{2n_k} & (i > k, j = k) \end{cases}$$

と定義し（$n_{2k-i} := n_i,\ 1 \leq i \leq k-1$ とします）、

$$A_{i_0\cdots i_r}(X) := \tilde{X}_{i_0 i_1}\tilde{X}_{i_1 i_2}\cdots\tilde{X}_{i_{r-1} i_r}$$

と定めます。ただし、

$$J_m := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & O & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & O & \end{pmatrix} \in GL(m,\mathbb{R}),$$

$$J'_m := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{O\ \iddots\ O}}^{m} & \overbrace{\hphantom{O\ \iddots\ O}}^{m} \end{array} \\ \begin{pmatrix} O & \begin{matrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{matrix} & O \end{pmatrix} \end{array} \in GL(2m,\mathbb{R})$$

とします。このように捻っても、やはり (4) が成り立ちます。

2.2.2 例外型に対する証明

古典型に対しては上記のようにして対処できますが、例外型については行列群として実現して同じように取り組むことは困難であると思われ、今現在は表現論を用いた証明があるのみです。こちらの証明は簡単で、前の節で述べましたように Stembridge 氏が無重複テンソル積表現の分類を既に与えていますので、

「一般化カルタン分解が存在すれば強可視的作用が得られ、
従って無重複定理が得られる」

ことの対偶を取ることで「分解不可能性」を証明することができます。

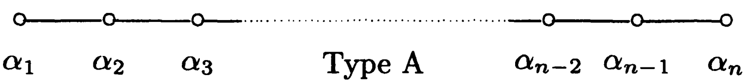
3 一般化カルタン分解の分類

この節では、G を連結単純コンパクトリー群、$\mathfrak{t}$ を G のリー環のカルタン部分環、σ を G の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 対合、Π を基本ルート系、Π', Π'' を Π の部

分集合とし、$\mathrm{L}_{\Pi'}, \mathrm{L}_{\Pi''}$ によってそれぞれそのルート系が Π', Π'' で生成される G のレビ部分群を表すこととします。例えば、$\Pi' = \Pi$ である場合は $\mathrm{L}_{\Pi'} = G$ であり、$(\Pi')^c := \Pi \setminus \Pi'$ が 1 つの元よりなる場合は $\mathrm{L}_{\Pi'}$ は極大放物型部分群の（極大）レビ部分群に対応します。

以下に、$G = \mathrm{L}_{\Pi'}\, G^\sigma\, \mathrm{L}_{\Pi''}$ を満たす (Π', Π'') の組の分類表を挙げます。(ただし、レビ部分群が G 自身になる自明な場合を除きます。また、表中で Π' と Π'' を入れ替えても分解は成り立つことに注意して下さい。) 表中では $(\mathrm{L}_{\Pi'}, \mathrm{L}_{\Pi''})$ が共に G の対称部分群である場合を "エルミート型" として扱っています。エルミート型に対して可視的な作用のあることは、[Ko6] においてコンパクトと限らない一般的な枠組みで証明されています。(エルミート型の場合の作用は、リーマン多様体への等長作用に対して定義される "polar" な作用にもなりますが ([Her])、非エルミート型の場合には polar であるとは限らないことが知られています。Kähler 多様体であれば「visible」と「polar」の両方を考えることができますが、作用の可視性そのものは複素多様体への正則な作用であれば定義されることに注意してください。)

3.1 A_n 型の分類（[Ko5]）



以下で、$1 \le i, j, k \le n$ とする。

エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$.

非エルミート型：

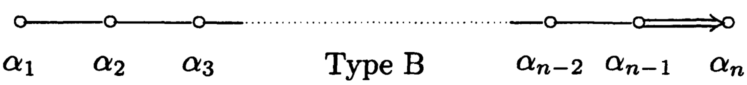
I. $(\Pi')^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_k\}$, $\min_{p=i,j}\{p, n+1-p\} = 1$, or $i = j \pm 1$.

II. $(\Pi')^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_k\}$, $\min\{k, n+1-k\} = 2$.

III. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, Π'' : anything, $i = 1$ or n.

※ III で、$(\Pi'')^c$ が 1 つの元からなる場合はエルミート型になります。

3.2 B_n 型の分類

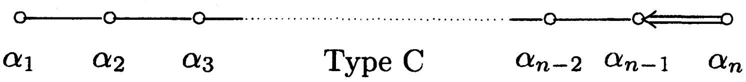


エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_1\}$.

非エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_n\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_n\}$.

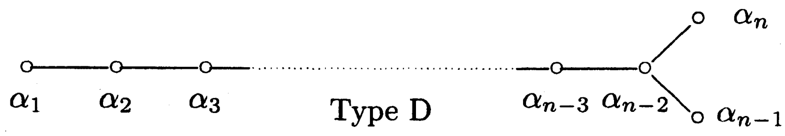
II. $(\Pi')^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_i\}$, $2 \le i \le n$.

3.3 C_n 型の分類



エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_n\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_n\}$.
非エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_i\}$, $1 \le i \le n$.

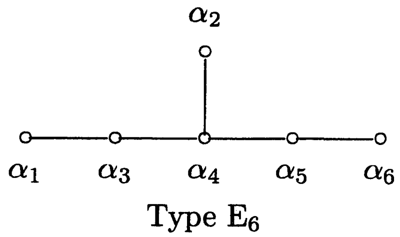
3.4 D_n 型の分類



エルミート型: I. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$, $i, j \in \{1, n-1, n\}$.
非エルミート型：

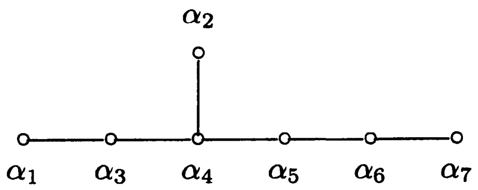
Ⅰ. $(\Pi')^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$, $j \neq 1, n-1, n$
Ⅱ. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j \in \{2, 3\}$.
Ⅲ. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, n-1, n\}$.
Ⅳ. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, 2\}$.
Ⅴ. $(\Pi')^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$, $j \in \{n-1, n\}$ *or* $k \in \{n-1, n\}$.
Ⅵ. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_2, \alpha_j\}$, $n = 4$, $(i, j) = (3, 4)$ or $(4, 3)$.

3.5 E_6 型の分類



エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$, $i, j \in \{1, 6\}$.
非エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_1, \alpha_6\}$, $i = 1$ or 6.
Ⅱ. $(\Pi')^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_j\}$, $i = 1$ or 6, $j \neq 1, 4, 6$.

3.6 E_7 型の分類



Type E_7

エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_7\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_7\}$.
非エルミート型： I. $(\Pi')^c = \{\alpha_7\}$, $(\Pi'')^c = \{\alpha_i\}$, $i = 1$ or 2.

3.7 E_8, F_4, G_2 型の分類

分解 $G = L_{\Pi'} G^{\sigma} L_{\Pi''}$ が成り立つような、G よりも真に小さいレビ部分群の組 $(L_{\Pi'}, L_{\Pi''})$ は存在しない。

4 一般化カルタン分解から得られる無重複定理

以下に、一般化カルタン分解に対応する無重複テンソル積表現 $\mu \otimes \nu$ の表を挙げます。但し、ω_* は基本ウェイトを表し（Dynkin 図形のラベルは上で与えている通りとします）、パラメータ a, b, c は任意の非負整数です。

P. Littelmann 氏は表中のエルミート型に対応する分類表を論文 [Li] において得ており、さらに表現の分岐則の公式も与えています。ただし非エルミート型は扱っていません。また、J. R. Stembridge 氏は組み合わせ的手法により有限次元無重複テンソル積表現の完全な分類表を、論文 [St2] において与えています。ただし、こちらは分岐則は与えていません。本稿では、下記の無重複定理を可視的作用を通じて幾何学的手法によって得ています。

4.1 A_n 型（[Ko5]）

以下で、$1 \le i, j, k \le n$ とする。
エルミート型： I. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j$.
非エルミート型：

I. $\mu = a\omega_i + b\omega_j$, $\nu = c\omega_k$, $\min_{p=i,j}\{p, n+1-p\} = 1$, or $i = j \pm 1$.

II. $\mu = a\omega_i + b\omega_j$, $\nu = c\omega_k$, $\min\{k, n+1-k\} = 2$.
III. $\mu = a\omega_i$, ν : anything, $i = 1$ or n.

※ III で、ν が 1 つの基本ウェイトの定数倍である場合はエルミート型の分解に対応する。

4.2 B_n 型

エルミート型： I. $\mu = a\omega_1$, $\nu = b\omega_1$.
非エルミート型： I. $\mu = a\omega_n$, $\nu = b\omega_n$.
II. $\mu = a\omega_1$, $\nu = b\omega_i$, $2 \le i \le n$.

4.3 C_n 型

エルミート型： I. $\mu = a\omega_n$, $\nu = b\omega_n$.
非エルミート型： I. $\mu = a\omega_1$, $\nu = b\omega_i$, $1 \le i \le n$.

4.4 D_n 型

エルミート型： I. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j$, $i, j \in \{1, n-1, n\}$.
非エルミート型：

I. $\mu = a\omega_1$, $\nu = b\omega_j$, $j \neq 1, n-1, n$
II. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j$, $i \in \{n-1, n\}$, $j \in \{2, 3\}$.
III. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j + c\omega_k$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, n-1, n\}$.
IV. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j + c\omega_k$, $i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, 2\}$.
V. $\mu = a\omega_1$, $\nu = b\omega_j + c\omega_k$, $j \in \{n-1, n\}$ *or* $k \in \{n-1, n\}$.
VI. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_2 + c\omega_j$, $n = 4$, $(i, j) = (3, 4)$ or $(4, 3)$.

4.5 E_6 型

エルミート型： I. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j$, $i, j \in \{1, 6\}$.
非エルミート型： I. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_1 + c\omega_6$, $i = 1$ or 6.
II. $\mu = a\omega_i$, $\nu = b\omega_j$, $i = 1$ or 6, $j \neq 1, 4, 6$.

4.6 E_7 型

エルミート型： I. $\mu = a\omega_7$, $\nu = b\omega_7$.
非エルミート型： I. $\mu = a\omega_7$, $\nu = b\omega_i$, $i = 1$ or 2.

注意 4.1 (上記無重複テンソル積表現 4.1–4.6 について).

(1) 岡田聡一氏の論文 [Ok] では 4.1–4.6 の内で、

A 型: エルミート型で $i+j=n$ の場合

B 型: 非エルミート型の I. の場合

C 型: エルミート型の場合

D 型: エルミート型で $i,j\in\{n-1,n\}$ の場合

が扱われており、石川–若山両氏による minor summation formula ([IW]) を用いて具体的な分岐則が与えられています。

(2) 本稿で扱った無重複表現はテンソル積とレビ部分群への制限のみでしたが、例えば有川氏の論文 [Al] では単純リー環の有限次元既約表現の「外部自己同型による固定化部分リー環」への無重複な制限が扱われており、その分岐則も具体的に与えられています。

参考文献

[Al] H. Alikawa, Multiplicity-free branching rules for outer automorphisms of simple Lie algebras. J. Math. Soc. Japan, **59**, 2007, no. 1, 151–177.

[Fl] M. Flensted–Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case, J. Funct. Anal., **30**, 1978, no.1, 106–146.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Pure and Appl. Math. New York, London: Academic Press, 1978.

[Her] R. Hermann, Variational completeness for compact symmetric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **11**, 1960, 544–546.

[Ho] B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups, CWI Tract, **5**. Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1984.

[IW] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formulas of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra, **39**, 1995, 285–305.

[Kn] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, 2nd ed., Progr. Math. **140**, Birkhäuser, Boston, 2002.

[KO] 小林俊行、大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.

[Ko1] 小林俊行, Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules, 表現論シンポジウム 1997 報告集（三町勝久氏編集）, 1998, 9–17.

[Ko2] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $\mathrm{GL}(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math., **81**, 2004, 129–146.

[Ko3] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41**, 2005, 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[Ko4] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, Progr. Math., Birkhäuser, 2012 (in press), math. RT/0607004.

[Ko5] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(\mathrm{U}(n_1)\times\mathrm{U}(n_2)\times\mathrm{U}(n_3))\backslash\mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))$, J. Math. Soc. Japan, **59**, 2007, 669–691.

[Ko6] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, Transform. Groups, **12**, 2007, 671–694.

[Ko7] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restriction of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, in: Representation Theory and Automorphic Forms, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 2007, 45–109, math. RT/0607002.

[KT1] K. Koike and I. Terada, Young diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n, J. Algebra, **107**, 1987, 466–511.

[KT2] K. Koike and I. Terada, Young Diagrammatic Methods for the Restriction of Representations of Complex Classical Lie Groups to Reductive Subgroups of Maximal Rank, Adv. Math., **79**, 1990, 104–135.

[Li] P. Littelmann, On spherical double cones, J. Algebra, **166**, 1994, 142-157.

[Ma1] 松木敏彦, 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II, 等質空間上の非可換解析学 (京都, 1994), 数理解析研究所 講究録, No. **895**, 1995, 98–113.

[Ma2] T. Matsuki, Double coset decomposition of algebraic groups arising from two involutions. I, J. Algebra, **175**, 1995, 865–925.

[Ma3] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, J. Algebra, **197**, 1997, 49–91.

[Ok] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra, **205** 1998, 337–367.

[Sa1] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Geom. Dedicata, **145**, 2010, 151–158.

[Sa2] A. Sasaki, Visible action on irreducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2009, no. **18**, 3445–3466.

[Sa3] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \backslash SL(2n+1,\mathbb{C}) / Sp(n,\mathbb{C})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **17**, 2010, 201–215.

[St1] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products of Schur functions, Ann. Comb., **5**, 2001, 113–121.

[St2] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Represent. Theory, **7**, 2003, 404–439 .

[Wo] J. A. Wolf, Harmonic Analysis on Commutative Spaces, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 2007.

東京大学大学院数理科学研究科
東京都目黒区駒場 3-8-1
〒 153-8914
E-mail: yuichiro@ms.u-tokyo.ac.jp